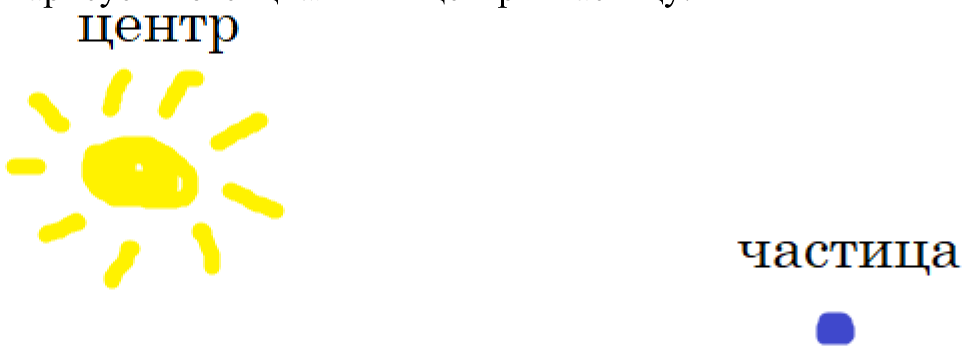
Ну одно измерение – это скучно. А что, если их три?

Теорема Лапласа: Движение частицы в центральном потенциальном поле, которое зависит только от расстояния до центра (т.е. $U(r)$, а не $U(r,\theta,\varphi)$), является плоским, т.е. лежит в плоскости.

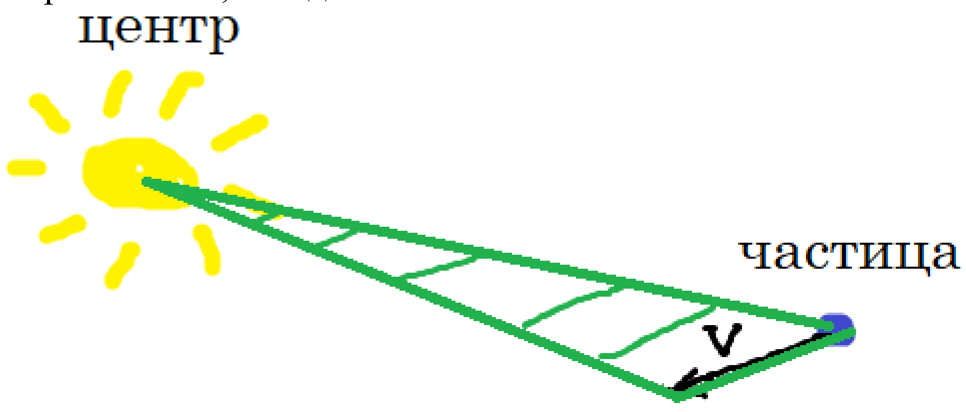
Вот так теорема! Оказывается, нет необходимости рассматривать движение в 3D, можно ограничиться 2D – плоскостью, где происходит движение. А 2D всегда лучше 3D, особенно если речь касается «Смешариков» и теормеха.

доказательство теоремы Лапласа:
Нарисуем потенциальный центр и частицу:



У нас куда-то направлена скорость:

А вот теперь смотри. Видите плоскость, в которой лежит и центр, и вектор скорости? Вот, я выделил её зелёным:



Вот в этой плоскости и будет происходить движение.

Отметим, что ускорение будет коллинеарно силе, а она будет направлена вдоль или против радиуса (в зависимости от вида $U(r)$). Т.е. ничто не может выбить частицу из этой плоскости! Там она и останется. Доказательство закончено.

Хорошая теорема, не правда ли? Теперь мы можем перейти в полярную СК, где всего две координаты: ρ и φ.

Конечно, нам интересны законы движения: $\rho(t)$ и $\varphi(t)$.
Но как в случае одномерного движения, где мы получили обратный закон движения – $t(x)$ вместо $x(t)$, здесь мы также получим не $\rho(t)$ и $\varphi(t)$, а $t(\rho)$ и $\varphi(\rho)$.
Вот они, красавицы:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}$$

где $U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}$. Что такое p_φ? Это обобщённый импульс по координате φ. На самом деле вы с ним уже знакомы, это момент импульса L. Просто буква L у теоретиков занята под лагранжиан, поэтому они момент импульса обозначают как p_φ.

Задача. Корабль массой m, полной энергией E и моментом импульса движется к солнцу. Он сместился с расстояния ρ_1 от солнца до расстояния ρ_2. На какой угол он сместился? Сколько времени это заняло?
Ответ:
Тупо применяем формулы:
Прошло времени

$$\Delta t = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GM}{\rho} - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

$$\Delta\varphi = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GM}{\rho} - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

подставляя в качестве потенциала $-\frac{GM}{\rho}$

Доказательство этих формул.

Сравним:

Для одномерного движения:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Для движения в центральном поле:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2})}}$$

Вспомним, как мы доказывали одномерный случай:

Запишем ЗСЭ, чтобы получить уравнение для скорости тела в точке x:

$$\frac{mv_E^2(x)}{2} + U(x) = E => v_E(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

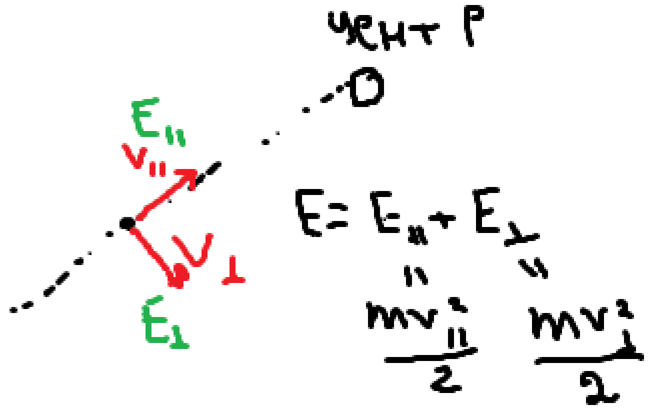
А величина, обратная v(x), т.е.

$$\frac{1}{v_E(x)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

имеет смысл «время dt, нужное для прохождения участка dx в окрестности точки с абсциссой x».

Осталось её проинтегрировать и получить время, нужное на прохождение всего отрезка. Всё, формула выведена!

Теперь рассмотрим центральное поле. Хочется заменить в доказательстве x на r. Однако надо быть аккуратнее: кинетическая энергия в точке x E-U(x) складывается из кин.энергии вдоль радиуса и поперечной составляющей:



Нам нужна только продольная радиусу энергия, а значит, нам, нужно вычесть ещё и перпендикулярную:

$$T_{\text{вдоль радиуса}}(r) = E - U(r) - T_{\text{поперёк радиуса}}(r)$$

Надо подсчитать $T_{\text{поперёк радиуса}}(r)$. Это дело нехитрое, сделаем это:

$$T_{\text{поперёк радиуса}}(r) = \frac{mv^2_{\text{поперёк радиуса}}}{2} = \frac{m^2 v^2_{\text{поперёк радиуса}}\rho^2}{2m\rho^2} = \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

Т.е.

$$T_{\text{вдоль радиуса}}(r) = E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

А $T_{\text{вдоль радиуса}}(r)$ и есть $\frac{mv^2_{\text{вдоль радиуса}}}{2}$. Вот и получаем знакомый результат:

$$\frac{mv^2_{\text{вдоль радиуса}}}{2} = E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

Откуда

$$v_{\text{вдоль радиуса}} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}$$

А далее, применив уже знакомое нам утверждение про величину, обратной скорости, и получаем

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2})}}.$$

А как вывести формулу с углом?

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)}}$$

Смотрите:

$$d\varphi = \omega dt = \omega \frac{dt}{d\rho} d\rho$$

Из закона сохранения момента импульса:

$$L = m\rho v = m\rho^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{m\rho^2}$$

Подставляем:

$$d\varphi = \frac{L}{m\rho^2}\frac{dt}{d\rho} d\rho$$

Мы уже знаем, что $\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$. Значит,

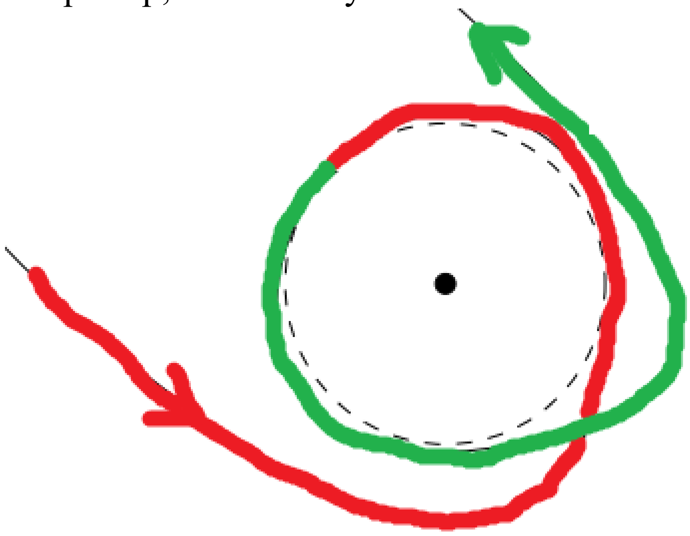
$$d\varphi = \frac{L}{m\rho^2}\frac{dt}{d\rho}d\rho = \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

Интегрируя по ρ, вот и получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}$$

Заметим, что эти имба формулы можно применять тогда и только тогда, когда ρ меняется монотонно.

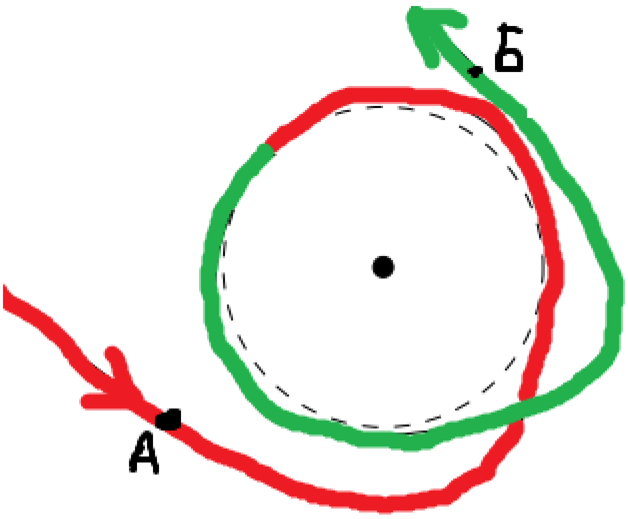
Например, в таком случае



Нужно найти минимальное расстояние, на которое пойдёт частица. Например, пусть нам нужно найти итоговое отклонение угол. Оно сложится с отклонения до достижения минимального расстояния и отклонения после достижения:

$$\Delta\varphi = \left|\int_{-\infty}^{\rho_{min}} \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}\right| + \left|\int_{\rho_{min}}^{+\infty} \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}}\right|$$

Аналогично нужно для имбаформулы со временем тоже разбить на два интеграла, взяв каждый по модулю (чтобы точно был положительный). Скажем, если мы хотим найти время от точки А от точки Б, то аналогично нужно два интеграла:



$$\Delta t = \left| \int_{\rho_A}^{\rho_{min}} \frac{d\rho}{\sqrt{2m\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}} \right| + \left| \int_{\rho_{min}}^{\rho_B} \frac{d\rho}{\sqrt{2m\left(E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}} \right|$$